Trigonometrie, bevor Sinus und Kosinus als reelle Funktionen behandelt werden

Bei Winkeln gibt es Verwirrungen und Missverständnisse, die bei Strecken nicht auftreten.
Bei Strecken wird meistens zwischen dem Namen, z.B. c, und der Länge, z.B. $|c| = 3$, unterschieden. Das ist mir bei Winkeln nie begegnet. Es ist üblich zu sagen: Es sei α der Winkel eines Dreiecks an der Ecke A und $\alpha = 37°$.
Weiter wird der Eindruck vermittelt, es sei klar, was ein Winkel in Grad bedeutet, während Sinus und Kosinus definiert werden müssten. Aber wie zeichnet man einen Winkel von 37°, wenn man keinen Winkelmesser hat? Umgekehrt, wenn der Sinus eines Winkels als $\sin = 0{,}123$ gegeben ist, dann braucht man nur ein Lineal, um den Winkel zu zeichnen, denn das Verhältnis $0{,}123 : 1$ kann man selber herstellen.
Könnte man auch einen Winkelmesser selber herstellen? Dazu müsste ein Kreis in 360 gleiche Teilbögen geteilt werden. Aber dafür gibt es kein grenzwertfreies mathematisches Verfahren. Natürlich bekommt man das durch Ausprobieren oder mit einer Drehbank *ungefähr* hin. Die Analysis lehrt, wie $(\cos 1° \,|\, \sin 1°)$ *approximativ(!)* berechnet werden und damit kann man – so genau wie man will – den Kreispunkt angeben, der 1° Abstand vom Einheitspunkt $(1|0)$ hat.

Offenbar wird im Anfangsunterricht in Geometrie nicht gelehrt, **wie** $\sin 37°$ berechnet wird. Darum ist es kein Wunder, dass die Definition

$$\sin = Gegenkathete/Hypotenuse$$

eigentlich nur sagt, welcher Winkel durch dies Streckenverhältnis gegeben ist und damit gezeichnet werden kann – und jedenfalls nicht, wie zu einer in Grad gegebenen Winkelgröße Sinus und Kosinus ermittelt werden. Deshalb treten im Anfangsunterricht Sinus und Kosinus wie in der Antike als Maßzahlen zum Festlegen von Winkeln auf und nicht als reelle Funktionen. Mit

$$\sin\alpha = Gegenkathete/Hypotenuse = 0{,}3$$

ist also gemeint: α ist der Name des (zeichenbaren) Winkels, der durch die Größe $\sin = 0{,}3$ definiert ist. Die Größe von α in Grad spielt dabei keine Rolle.

Nachdrücklich betont werden muss, dass die Definition

$$\sin = Gegenkathete/Hypotenuse$$

nur gemacht werden kann, weil der *Strahlensatz* gilt. Dieser früher in der Schule bewiesene Satz ist inzwischen Opfer des Fortschritts. "Geometrie ohne Strahlensatz" und "Analysis ohne Ungleichungen" zeigt eben, dass die Bildungspolitik die Schulmathematik nicht mehr von Mathematikern formulieren läßt und so die Lernzeit der Jugendlichen verschwendet.

Im täglichen Leben werden Gradangaben zur Mitteilung der Größe von Winkeln benutzt – z.B. bei der GPS-Standortangabe auf der Erdoberfläche durch geographische Länge und Breite in Grad. In der Geometrie ist die Angabe von Winkel*größen* durch die Verhältnisse sin oder cos wichtiger. Deshalb gibt es auf den Taschenrechnern Tasten, die diese beiden Winkelangaben in einander umrechnen, ohne dass im Anfangsunterricht der Geometrie erklärt wird, wie diese Umrechnung gemacht wird. Die (zumindest früher) in Geometrie gelehrten Sätze kann man offensichtlich schon verstehen, wenn man

- nie von Gradangaben gehört hat,
- die Symbole $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ als *Namen* von Winkeln auffasst und
- $\sin\alpha,\ \cos\alpha \ldots$ kennt als die Größe von *Verhältnissen*, die Winkel festlegen:

Sinussatz am Dreieck: $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, in Worten:
Länge von a mal sin-Verhältnis für β = Länge von b mal sin-Verhältnis für α,
Kosinussatz am Dreieck: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$,
Additionstheoreme: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$,
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Die Additionstheoreme addieren z.B. einfach Punkte $\binom{x}{y} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \binom{\cos\beta}{\sin\beta}$ auf dem Einheitskreis, deren x-y-Koordinaten man kennt. Über die Größe in Grad der durch Sinus und Kosinus gegebenen Winkel α, β muss man dabei nichts wissen. Die Gradangaben sind in anderem Zusammenhang praktische Größenangaben für Winkel. Praktisch ist z.B., dass man beim Aneinanderlegen von Winkeln für die Größe nur das Pluszeichen braucht und keine Additionstheoreme.

Es gibt keine rechtwinkligen Dreiecke, aus denen $\sin(90°) = 1, \cos(90°) = 0$ als Verhältnis abgelesen werden kann. Der Vorgänger von Sinus und Kosinus war das aus dem Babylonischen mit *chord* ins Englische übersetzte Verhältnis

| Kreissehne zum Mittelpunktswinkel α | : |Radius|,
in moderner Notation also: $chord(\alpha) = 2\sin(\alpha/2)$.

Diese ältere Maßzahl hat bei 90° und 180° keine Probleme. Eine Erklärung für ihre Ablösung behauptet, Sinus und Kosinus seien zur Beschreibung der für die Planetenbewegung benötigten Epizyklen viel bequemer gewesen. Aber wer Epizyklen beschreiben will, der hat sich gewiss Sinus und Kosinus am Einheitskreis vorgestellt. Mir scheint, auch unsere Winkelmesser und Kompasse sind Kreisen so nahe, dass man die Definition am Einheitskreis möglichst nahe am ersten Auftreten von Sinus und Kosinus behandeln sollte. Dabei treten dann die Vorzeichenprobleme gar nicht erst auf, die daher rühren, dass Längen immer als nicht negative Zahlen angegeben werden und daher keine negativen Verhältnisse liefern (aber $\cos 135° < 0$). (Die Entfernung von Aachen nach Köln ist $+65\ km$, obwohl die Zahlen auf den Kilometersteinen *abnehmen*.) Ab der Definition am Einheitskreis treten Sinus und Kosinus als reelle Funktionen auf, die zunächst die Umrechnung zwischen den verschiedenen Größenangaben für Winkel erledigen und bald danach mit der Beschreibung von Drehungen und Schwingungen den Anfang der theoretischen Physik einläuten.

Mein Text A6 zu diesen Funktionen beginnt mit deren Definition am Einheitskreis und endet mit deren approximativer Berechnung.
Der Strahlensatz wird *ohne* Flächenformeln am Ende von Text G1 bewiesen.
Der Strahlensatz wird *mit* Flächenformeln auf Seite 7 von Text G3 bewiesen.