Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 8. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit den folgenden Untervektorräumen:

$$U_1 := \langle (1,1,1) \rangle, \quad U_2 := \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle, \quad U_3 := \langle (0,2,2), (-3,-3,0), (-1,0,1) \rangle.$$

(a) Finde ein Beispiel einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = U_1$. Ist jede solche Abbildung surjektiv?

(b) Finde ein Beispiel einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = U_2$. Gibt es eine solche Abbildung f die surjektiv ist?

(c) Finde ein Beispiel einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\ker(f) = U_3$. Ist jede solche Abbildung surjektiv?

Aufgabe 2. Zeige, dass es für jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, einen Vektor $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass

$$f((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $n-1$, und sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $v \notin U$. Betrachte die kanonische $\mathbb{R}$-lineare $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/U$.

(a) Betrachte die Abbildung $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a \mapsto a \cdot v$. Zeige, dass die Komposition

$$p \circ i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n/U$$

ein Isomorphismus ist.

(b) Folgere aus Teil (a), dass es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\ker(f) = U$ gibt. Wann gilt $\ker(f) = \ker(g)$ für zwei lineare Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$?

(c) Betrachte die Komposition

$$(p \circ i)^{-1} \circ p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.$$

Veranschauliche diese Abbildung graphisch im Fall $n = 2$ und $n = 3$.

Bitte umdrehen.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und sei V und W je ein K-Vektorraum.

(a) Zeige, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein K-Vektorraum ist. (Hinweis: Es ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$.)

(b) Falls $\dim_K(V) = n$ und $\dim_K(W) = m$ endlich sind, so bestimme man die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V. Sei weiterhin W ein K-Vektorraum und sei $f : W \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung. Wir betrachten außerdem die kanonische K-lineare Abbildung $p : V \longrightarrow V/U$.

(a) Man zeige:
$$\ker(p \circ f) = W \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{im}(f) \subset U.$$

(b) Man zeige, dass $p \circ f$ genau dann surjektiv ist, wenn $U + \mathrm{im}(f) = V$.

(c) Man zeige, dass $p \circ f$ genau dann injektiv ist, wenn $U \cap \mathrm{im}(f) = \{0_V\}$.